verific... ón de CQ (Condiciones Qualifications)

Solucionario del Examen Final – MATEMÁTICA 03 — 2025-1

Profesor: Cheng Chong.

Problema 01. → Considere el problema:

$$\min_{x,y} \; (x+3)^2 + (y-5)^2.$$

$$\text{s.a} \quad (x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 16$$

$$x + 2y - 4 \geq 0$$

$$x \geq 0, \; y \geq 0.$$

a) TEOREMA DE WEIERSTRASS, este teorema indica que si una función continua está definida sobre un conjunto no vacío, cerrado y acotado (compacto), entonces alcanza su mínimo y máximo.

En este problema:

- La función objetivo $f(x,y) = (x+3)^2 + (y-5)^2$ es continua.
- El conjunto factible no vacío, cerrado y acotado.

Por lo tanto, se puede usar Weierstrass para afirmar que existe solución óptima.

b) Hallar el óptimo mediante análisis geométrico – Interpretación – La función objetivo representa círculos de nivel concéntricos alrededor de $(-3,5)$. Las curvas de nivel de interés son: ⊙ $Z = (\sqrt{29}-4)^2 \approx (1.39)^2 \approx 1.92$. ⊙ $Z = (\sqrt{29}+4)^2 \approx (9.39)^2 \approx 88.2$.
⊙ $Z = 3^2 = 9$.

Gradiente: $\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x+3) \\ 2(y-5) \end{pmatrix}$ apunta radialmente desde $(-3,5)$.

Conclusión geométrica ⊙ La curva de nivel $Z = (\sqrt{29}-4)^2$ no interseca a la región factible.
⊙ La curva de nivel $Z = 9$ interseca la región factible en el punto $(0,5)$, verificando que: $(0+3)^2 + (5-5)^2 = 9 + 0 = 9$.

Este punto cumple todas las restricciones, por lo que es el ** mínimo global **
⊙ La curva de nivel $Z = (\sqrt{29}+4)^2$ interseca tangencialmente la región en: ~~Este~~ punto $(x,y) = \left(2 + \frac{20}{\sqrt{29}}, 3 - \frac{8}{\sqrt{29}}\right)$ con $Z \approx 88.2$. Este punto corresponde al ** máximo global ** si el problema fuera de maximización.

Relación de gradientes

Situación	Relación gradientes	Interpretación
mínimo $(0,5)$	opuestos	No se puede disminuir más sin violar la factibilidad
máximo $\left(2+\frac{20}{\sqrt{29}}, 3-\frac{8}{\sqrt{29}}\right)$	mismo sentido	la restricción limita el aumento en ese punto

Conclusión: El mínimo global es en $(0,5)$ con valor $Z=9$. El máximo (si se tratara de un problema de maximización) sería en el punto $\left(2+\frac{20}{\sqrt{29}}, 3-\frac{8}{\sqrt{29}}\right)$; con valor $Z = (\sqrt{29}+4)^2$.

<u>Problema (4)</u> : 4.(a). $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \le x^2 - y^2 \le 4,\ 4 \le y + x^2 \le 6,\ x > 0,\ y > 0\}$.

$$T: \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = u + x^2 \end{cases} \longrightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left\| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right\| = 2(x + 2xy) \longrightarrow \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \frac{1}{2(x+2xy)}.$$

$$T^{-1}(K) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2_{uv} / 1 \le u \le 4,\ 4 \le v \le 6\}$$

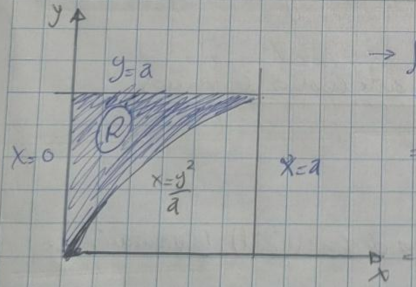
$$\iint_K e^{2(y+x^2)} (x + 2xy)\, dA = \iint_{T^{-1}(K)} e^{2v} (x+2xy) \cdot \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\, dv.$$

$$= \int_1^4 \int_4^6 \frac{1}{2} e^{2v}\, dv\, du = \int_1^4 du \int_4^6 \frac{1}{2} e^{2v}\, dv = \left(u \Big|_{u=1}^{u=4} \right) \left(\frac{1}{4} e^{2v} \Big|_{v=4}^{v=6} \right) = \frac{3}{4}\left(e^{12} - e^{8}\right).$$

<u>Problema (4.b)</u> :

$$\int_0^a \int_{\sqrt{ax}}^a \frac{y^2}{\sqrt{y^4 - a^2x^2}}\, dy\, dx = \iint_R \frac{y^2}{\sqrt{y^4 - a^2x^2}}\, dA.$$

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{xy} / 0 \le x \le a,\ \sqrt{ax} \le y \le a\} \rightarrow R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{xy} / 0 \le y \le a,\ 0 \le x \le \frac{y^2}{a}\}$$



$$\rightarrow \iint_R \frac{y^2}{\sqrt{y^4 - a^2x^2}}\, dA = \int_0^a \int_0^{\frac{y^2}{a}} \frac{y^2}{\sqrt{y^4 - a^2x^2}}\, dx\, dy.$$

$$= \int_0^a \left[\frac{y^2}{a} \sin^{-1}\left(\frac{ax}{y^2}\right) \Big|_{x=0}^{x=y^2/a} \right] dy$$

$$= \int_0^a \frac{y^2}{a}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) dy = \frac{\pi}{2a} \int_0^a y^2\, dy = \frac{a^2\pi}{6}.$$

c) Solución óptima del dual usando holgura complementaria.

Se da como solución óptima del primal:

$x_1 = 80$, $x_2 = 60$.

Verificación de restricciones activas: • Rosas: $3(80)+60 = 300$ (activa).
• tulipanes: $80+60 = 140$ (activa). • Ibiscos: $80+3(60) = 260 < 300$ (no activa).

Por holgura complementaria: Si una restricción no está activa, su variable dual correspondiente es cero: $y_3 = 0$

Resolviendo el sistema para "y_1" y "y_2": De las restricciones duales activas:

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 = 2000 \\ y_1 + y_2 = 1000 \end{cases}$$

restando la segunda de la primera: $2y_1 = 1000 \rightarrow y_1 = 500$

Sustituyendo en la segunda: $500 + y_2 = 1000 \rightarrow y_2 = 500$.

Conclusión: $y_1 = 500$, $y_2 = 500$, $y_3 = 0$.

(d) Valor del ramo con 1 rosa, 1 tulipán y 1 ibisco.

El valor sombra es: $1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 = 500 + 500 + 0 = 1000$ u.m.

Interpretación: El ramo tiene un valor económico marginal de 1000 u.m en la solución óptima.

(e) Estimación de la variación en ingresos ante cambios de precios.

Si: • Precio de T_1 disminuye en 10 u.m
• Precio de T_2 disminuye en 5 u.m.

Dado que la base óptima no cambia (Técnica de sensibilidad), la variaciónes es:

Conclusión: El ingreso máximo disminuirá aproximadamente en 1100 u.m.

Problema (03): Optimización lineal

DATOS DEL PROBLEMA:

Flor	Req. en T_1	Req. en T_2	Disponibilidad
Rosas	3	1	300
Tulipanes	1	1	140
Ibiscos	1	3	300

Precios de venta →
- tipo T_1: 2000 u.m
- tipo T_2: 1000 u.m

a) Formulación del modelo primal.

Variables de decisión:

x_1 = Cantidad de arreglos tipo T_1, x_2 = Cantidad de arreglos tipo T_2.

Función objetivo (maximizar ingresos): $\max Z = 2000x_1 + 1000x_2$.

Restricciones:

$3x_1 + x_2 \le 300$ (Rosas)

$x_1 + x_2 \le 140$ (Tulipanes)

$x_1 + 3x_2 \le 300$ (Ibiscos)

$x_1, x_2 \ge 0$

Conclusión: modelo formado correctamente, maximizando ingresos sujeto a disponibilidad de flores.

(B) Formulación del problema dual – forma general (maximización con $\le$ restricciones).

$\max c^T x \quad Ax \le b \Rightarrow \min b^T y \quad A^T y \ge c, \ y \ge 0.$

Aplicación de este problema: Variables duales: y_1 = Precio sombra de rosas.

y_2 = Precio sombra de tulipanes, y_3 = Precio sombra de ibiscos.

Función objetivo dual: $\min W = 300y_1 + 140y_2 + 300y_3$.

restricciones duales:

$3y_1 + y_2 + y_3 \ge 2000$

$y_1 + y_2 + y_3 \ge 1000$

$y_1, y_2, y_3 \ge 0.$

Interpretación económica: El dual minimiza el costo total de adquisición de flores para garantizar ingresos mínimos de los arreglos.

Justus

verificación de CQ (Conditions Qualifications)

(i) LICQ las gradientes de las restricciones activas son:

$\nabla g_1 = [0, -2]$, $\nabla g_2 = [0, 2]$.

Son linealmente dependientes ($\nabla g_2 = -1 \cdot \nabla g_1$).

** LICQ no satisface **.

(ii) MFCQ : Para que esta exista un vector "d" tal que:

- $\nabla g_i^T < 0$ para una "i", $-\nabla g_j^T d \leq 0$ para las demás.

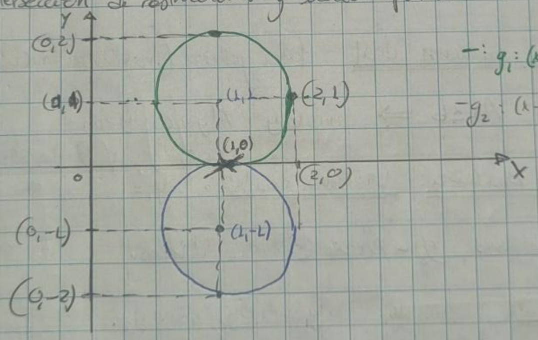
Aquí, como las gradientes son verticales y opuestas, no existe un "d" que satisfaga simultáneamente ambas. *** MFCQ no satisfecha **

Conclusión sobre KKT. - LICQ no se cumple - MFCQ no se cumple.

La condición de estacionariedad no puede satisfacerse. Por lo tanto, ** KKT no es aplicable aquí como condición necesaria ** debido a no regularidad.

Sin embargo la solución óptima existe y se determina geométricamente como el punto de tangencia.

Figura : Intersección de restricciones y solución óptima.



- : $g_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$

- $g_2 : (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 1$.

X : Solución (1,0)

(i) LICQ las gradientes de las restricciones activas son:

Problema (02) _ optimización con restricciones elípticas.

Planteamiento minimizar $f(x,y) = x$ Sujeto a $g_1(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 1 \leq 0$
$g_2(x,y) = (x-1)^2 + (y+a)^2 - 1 \leq 0.$

(a) existencia de solución: Para que exista solución, los discos deben intersectarse.

Distancia entre centros: $d = \sqrt{(1-1)^2 + (1-(-a))^2} = |1+a|$

Condición de intersección: ~~despejando~~ $\rightarrow |1+a| \leq 2.$ despejando: $-3 \leq a \leq 1.$

Conclusión: El problema tiene solución para $a \in [-3, 1].$

(b) Caso $a = +1$ distancia entre centros. $d = |1-(-1)| = 2.$

Los discos son tangentes, existe solución única.

Determinación geométrica del punto solución igualando restricciones activas:

$(y-1)^2 = (y+1)^2$: expandimos $|y^2-2y+1| - |y^2+2y+1| = 0.$

$-4y = 0 \rightarrow y = 0.$ Sustituyendo en g_1: $(x-1)^2 + 1 = 1 \rightarrow (x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$ ✓

Solución óptima: $x^* = 1;\ y^* = 0.$

Gradiente de la función objetivo: $\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Gradiente de $g_1(x,y)$: Definición general $\nabla g_1(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-1) \end{bmatrix}$

Evaluando en $(1,0)$: $\nabla g_1(1,0) = \begin{bmatrix} 2(1-1) \\ 2(0-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

Gradiente de $g_2(x,y)$: Definición general $\nabla g_2(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Verificación de Condiciones de KKT: Condición de estacionariedad:

Se requiere que existan $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ tales que: $\nabla f + \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 = 0.$

Es decir: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

* De la Componente x^{**}: $1+0+0=0 \rightarrow 1 = 0. \rightarrow$ Lo cual es una Contradicción

Justus

c). Condiciones KKT y resolución Lagrangiano. — Función de Lagrangiano

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (x+3)^2 + (y-5)^2 + \lambda_1\left[(x-2)^2 + (y-3)^2 - 16\right] + \lambda_2(4-x-2y) - \lambda_3 x - \lambda_4 y.$$

Gradientes (condiciones de primer orden): $\frac{\partial L}{\partial x} = 2(x+3) + 2\lambda_1(x-2) - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$

$\frac{\partial L}{\partial y} = 2(y-5) + 2\lambda_1(y-3) - 2\lambda_2 - \lambda_4 = 0.$

Restricciones primales: $(x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 16$, $x + 2y - 4 \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

multiplicadores: $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 \geq 0$, $\lambda_4 \geq 0$.

Condiciones de complementariedad: $\lambda_1\left[(x-2)^2 + (y-3)^2 - 16\right] = 0.$

$\lambda_2 \cdot [4-x-2y] = 0.$ $\lambda_3 x = 0$, $\lambda_4 y = 0$.

Resolución: Del análisis geométrico sabemos que el óptimo está en $(0,5)$.
Verificamos condiciones en ese punto:
- Restricción circular: $(0-2)^2 + (5-3)^2 = 4+4 = 8 < 16$, no activa, por lo tanto $\lambda_1 = 0$.
- Restricción lineal: $0 + 2(5) - 4 = 6 > 0$, no activa, entonces $\lambda_2 = 0$.
- Restricción de no negatividad en x: $x = 0$ está activa, entonces $\lambda_3 \geq 0$.
- Restricción de no negatividad en y: $y = 5 > 0$, no activa, por lo tanto $\lambda_4 = 0$

Sustituyendo en las derivadas: $2(0+3) - \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 6.$ $2(5-5) = 0.$

Conclusión: Inciso (c) El sistema KKT se satisface con $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 6$, $\lambda_4 = 0$ y solución $(0,5)$.

d) Verificación de mínimo global Condiciones de suficiencia:

- El problema es de optimización convexa: - la función convexa (cuadrática con matriz Hessiana definida positiva). - Las restricciones definen un punto convexo (Intersección de un círculo y semiplanos.)

Se cumplen las condiciones KKT y el problema es convexo, por lo tanto:

Conclusión: (d) El punto $(0,5)$ es un mínimo global.